数理解析研究所講究録
519巻 1984年 86-98

セントラルサーバーモデルの滞在時間の分布計算

防衛大学校　上岡　喜義 (Kiyoshi Kamioka)
川島　武 (Takeshi Kawashima)

§1　はじめに

ここでいうセントラルサーバーモデルとは、２ノードからなる２段巡回待ち行列網のことである。通常の電子計算機システムは端末機群とＣＰＵからなり、これらのモデルとしてセントラルサーバーモデルが考えられている。
セントラルサーバーモデルの滞在時間分布はごく基本的なモデルを除いてはあまり知られていない

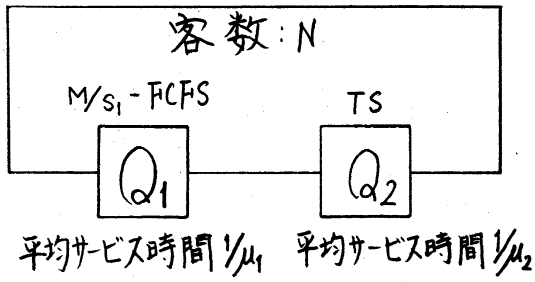
そこで、本研究においては、サービス規律がそれぞれ先着順サービスとタイムシェアリングである２つのノードを持つ２段巡回待ち行列網の滞在時間分布とその特性値について考察した。（ここで、滞在時間とは巡回時間のことを言う）

また、サービス規律が先着順サービスである２つのノードを持つ２段巡回待ち行列網の滞在時間分布とその特性値[1]との比較を、若干の数値例で示した。

§2. モデルの説明

モデルの概図を図1に示す。
図1で、左側のノードをQ_1、右側のノードをQ_2とし、以下の条件を満たすものとする。

図 1.



1). N人の客がこの系を反時計回りに巡回する。

2). Q_1でのサービス規律は先着順サービス(FCFS)で、窓口数はS_1 $(1 \leqq S_1 \leqq N)$、各客はそれぞれ平均サービス時間$1/\mu_1$の独立な指数分布サービスを窓口から受ける。

3). Q_2でのサービス規律はタイムシェアリング(TS)で、各客はそれぞれ平均サービス時間$1/\mu_2$の独立な指数分布サービスを受ける。

4). Q_1とQ_2はそれぞれ独立なサービスを行う。

5). 系は平衡状態である。

(なお、最後の数値例において、このモデルと比較するサービス規律が先着順サービスである2つのノードを持つ2段巡回待ち行列網は、上の条件3)を次の3')に換えたものである。

3'). Q_2でのサービス規律は先着順サービス(FCFS)で、窓口数はS_2 $(1 \leqq S_2 \leqq N)$、各客はそれぞれ平均サービス時間$1/\mu_2$の独立な指数分布サービスを窓口から受ける。)

§3. 記号と基本的事項

次のように記号を定義する.

$q_1(t)$, $q_2(t)$; 時刻 t におけるそれぞれ Q_1 と Q_2 内の客数

$Q(t) = (q_1(t), q_2(t))$; 時刻 t での系の状態

$\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(\cdots < t_{-1} < 0 \leqq t_0 < t_1 < \cdots)$; Q_1 での任意の到着時点列

$\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ $(\cdots < \tau_{-1} < 0 \leqq \tau_0 < \tau_1 < \cdots)$; Q_1 での任意の退去時点列

W_n^1, W_n^2 ; 到着時点 t_n で Q_1 に入る客 C のそれぞれ Q_1 と Q_2 での滞在時間

w_n^1, w_n^2 ; 退去時点 τ_n で Q_1 を退去する客 C のそれぞれ Q_1 と Q_2 での滞在時間

$\nu(n)$; 時刻 t_n において Q_1 に到着した客が Q_1 を退去する時刻 τ_m につけられたインデックス m. すなわち, $W_n^1 = \tau_{\nu(n)} - t_n$.

系は平衡状態であるので, $\forall t \in (-\infty, \infty)$ に対して, 次式が成り立つ.

$$P(Q(t) = (q_1, q_2)) = \frac{G(N)}{\prod_{i=1}^{q_1} \mu_1(i) \cdot \prod_{i=1}^{q_2} \mu_2(i)} \overset{\text{def}}{=} P_N(q_1, q_2) \quad (1)$$

ただし, $q_1 + q_2 = N$, $\mu_j(i) = \min(i, s_j) \cdot \mu_j \quad (j = 1, 2)$

$G(N)$; 正規化定数

また, $\{t_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, $\{\tau_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ において, それぞれ定常な確率測度 P_a, P_d に対して, 次式が成り立つ.

$$P_a(Q(t_n + 0) = (q_1 + 1, q_2)) = P_{N-1}(q_1, q_2) \quad (2)$$

$$P_d(Q(\tau_n - 0) = (q_1 + 1, q_2)) = P_{N-1}(q_1, q_2) \quad (3)$$

ここで，$P_a(\cdot) = P(\cdot \mid t_0=0)$，$P_d(\cdot) = P(\cdot \mid \tau_0=0)$と考えられる。そして，$P_a(W_n^1 \leqq x, W_n^2 \leqq y)$ 及び $P_d(w_n^1 \leqq x, w_n^2 \leqq y)$ はnに依存しない。

次に，これらの値が等しいことが，$W_n^j\ (j=1,2)$ は$w_{\nu(n)}^j\ (j=1,2)$ として表現でき，$Q(t)\ (-\infty<t<\infty)$ はエルゴード的であるという事実から証明される。すなわち，

補助定理1．任意のnに対して，次式が成り立つ。

$$P_a(W_n^1 \leq x, W_n^2 \leq y) = P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y) \qquad (4)$$

§4．可逆性と滞在時間分布

この節では，$P_d(w_n^1 \leq x, w_n^2 \leq y)$の表現を類推する。これは，$n$に依存せず，(4)より，$P_a(W_n^1 \leq x, W_n^2 \leq y)$ と一致する。そのために，まず，次の補助定理を示す。

補助定理2．

$Q(t)$は可逆なマルコフ過程である。

証明

一般に，離散状態空間Sをともなうマルコフ過程$X(t)$ $(-\infty < t < \infty)$は，次式を満たすときのみ可逆である。

$$P(s)\cdot R(s,s') = P(s')\cdot R(s',s) \qquad (\forall s, s' \in S) \qquad (5)$$

ここで，$P(s)$と$R(s,s')$はそれぞれ$X(t)$の平衡分布と推移割合である。

過程$Q(t)$に対して，次式を得る．

$$R((q_1+1,\ q_2),(q_1,\ q_2+1)) = \mu_1(q_1+1)$$
$$R((q_1,\ q_2+1),(q_1+1,\ q_2)) = \mu_2(q_2+1) \qquad (6)$$

これらのことと(1)から，(5)が保たれることを示せる。

Q.E.D.

この可逆性から，次の補助定理が導かれる．

補助定理3．

$$P_d(w_n^1 \leqq x \mid Q(\tau_n-0)=(q_1+1,q_2)) = P_a(W_n^1 \leqq x \mid Q(t_n+0)=(q_1+1,q_2)) \qquad (7)$$

証明)．

客Cが時刻$t_0=0$で，Q_1に到着したとし，$Q(+0)=\mathbb{K}(=(q_1+1,q_2))$とする．この条件のもとで$[0,\infty)$での前進過程における可能な到着及び退去時点列の組の全体を$\mathcal{R}$とし，それの要素を$\mathbb{r}=\{(t_i)_{i=0}^{\infty},(\tau_i)_{i=0}^{\infty}\}$とかく。この$\mathbb{r}$によって，$Q(t)$は決まる。

同様にして，$(-\infty,0]$での逆進過程において，客$\bar{C}$が$\tau_0=0$でQ_1に到着したとし，$Q(-0)=\mathbb{K}$とする。この条件のもとでの可能な退去及び到着時点列の組の全体を$\bar{\mathcal{R}}$とかく。

$\mathcal{R}\ni\mathbb{r}$に対して，原点対称な$\bar{\mathcal{R}}$の要素を$\bar{\mathbb{r}}=\{(t_i)_{i=-1}^{-\infty},(\tau_i)_{i=-1}^{-\infty}\}$とかくと，$\mathcal{R}$と$\bar{\mathcal{R}}$は一対一対応であり，

$$Q(t) \text{ on } \mathbb{r} = Q(-t) \text{ on } \bar{\mathbb{r}} \quad (t\geqq 0) \qquad (8)$$

$\mathbb{r}$，$\bar{\mathbb{r}}$に対する確率変数をそれぞれR，$\bar{R}$とすると，

可逆性から， $P(R=\mathbb{r}) = P(\bar{R}=\bar{\mathbb{r}}) \qquad (9)$

次に，$Q_{i|\mathbb{r}} = P(C$ が τ_i で Q_1 を退去する$|R=\mathbb{r})$

$\bar{Q}_{i|\bar{\mathbb{r}}} = P(\bar{C}$ が t_{-i-1} で Q_1 を退去する$|\bar{R}=\bar{\mathbb{r}})$ とかくと，

指数分布の無記憶性から　$Q_{i|\mathbb{r}} = \bar{Q}_{i|\bar{\mathbb{r}}}$ (10)

また，$T_{i|\mathbb{r}} = \tau_i$，$\bar{T}_{i|\bar{\mathbb{r}}} = -t_{-i-1}$ とおくと，$T_{i|\mathbb{r}} = \bar{T}_{i|\bar{\mathbb{r}}}$ (11)

以上のことから，次式がいえる。

$$P_a(W_0^1 \leqq x \mid Q(+0) = \mathbb{K}) \tag{12}$$
$$= \sum_{\mathbb{r}\in\mathbb{R}} \sum_{i=0}^{\infty} Q_{i|\mathbb{r}} \cdot 1_{[0,x]}(T_{i|\mathbb{r}}) \cdot P(R=\mathbb{r})$$
$$= \sum_{\bar{\mathbb{r}}\in\bar{\mathbb{R}}} \sum_{i=0}^{\infty} \bar{Q}_{i|\bar{\mathbb{r}}} \cdot 1_{[0,x]}(\bar{T}_{i|\bar{\mathbb{r}}}) \cdot P(\bar{R}=\bar{\mathbb{r}})$$
$$= P_d(w_0^1 \leqq x \mid Q(-0) = \mathbb{K}) \tag{13}$$

任意の n について，　$P_a(W_n^1 \leqq x \mid Q(t_n+0) = \mathbb{K}) = (12)$

$P_d(w_n^1 \leqq x \mid Q(\tau_n-0) = \mathbb{K}) = (13)$

が成り立つ　Q.E.D.

w_n^1 と w_n^2 は $Q(\tau_n-0)=(g_1+1, g_2)$ なる条件が与えられたときは，互いに独立であるから，(7)より，次式がいえる。

$$P_d(w_n^1 \leqq x,\ w_n^2 \leqq y \mid Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2))$$
$$= P_a(W_n^1 \leqq x \mid Q(t_n+0) = (g_1+1, g_2)) \cdot P_d(w_n^2 \leqq y \mid Q(\tau_n-0) = (g_1+1, g_2))$$

この積の右側の項は容易に求まる．次節ではこの積の左側の項を求める．

§5. Q_2での滞在時間分布.

1)．ここでは，Q_2での客の到着直後の状態が与えられた場合

の条件付滞在時間分布を求める。

記号を次のように定義する.

$\tilde{W}$；任意の客CのQ_2での滞在時間

$\tilde{Q}_2$；客CがQ_2に到着した直後のQ_2内の客数

$\tilde{T}$；客CがQ_2においてサービスを受ける時間

$G_n(t, u) = P(\tilde{W} > u \mid \tilde{Q}_2 = n, \tilde{T} = t)$　　とおく。

充分小さなΔuと$n = 1, \cdots, N$に対して，次式が成り立つ.

$$G_n(t, u+\Delta u) = \frac{n-1}{n}\cdot\Delta u\cdot\mu_2\cdot G_{n-1}\left(t-\frac{\Delta u}{n}, u\right) + \Delta u\cdot\mu(n)\cdot G_{n+1}\left(t-\frac{\Delta u}{n}, u\right)$$
$$+ \left\{1 - \Delta u\cdot\left(\frac{n-1}{n}\cdot\mu_2 + \mu(n)\right)\right\}\cdot G_n\left(t-\frac{\Delta u}{n}, u\right) + o(\Delta u) \qquad (14)$$

(ただし，$\mu(n) = \min(s_1, N-n)\cdot\mu_1$，$G_0(t, u) = G_{N+1}(t, u) = 0$　とおく。)

ここで，$\Delta u \to 0$とすると，

$$\frac{\partial}{\partial t}G_n(t, u) + n\cdot\frac{\partial}{\partial u}G_n(t, u) = (n-1)\cdot\mu_2\cdot G_{n-1}(t, u)$$
$$-\{n\cdot\mu(n) + (n-1)\cdot\mu_2\}\cdot G_n(t, u) + n\cdot\mu(n)\cdot G_{n+1}(t, u) \qquad (15)$$

このN個の連立微分方程式をベクトル表示すると，次式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{G}(t, u) + \mathrm{B}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\mathbb{G}(t, u) = \mathrm{A}\cdot\mathbb{G}(t, u) \qquad (16)$$

ただし

$$\mathbb{G}(t, u) = \begin{pmatrix} G_1(t, u) \\ \vdots \\ G_N(t, u) \end{pmatrix} \qquad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1, & & & 0 \\ & 2, & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & N \end{pmatrix}$$

$$A_{i,i+1} = i \cdot \mu(i) \ , \quad A_{i,i-1} = (i-1)\cdot\mu_2 \quad A_{i,i} = -(A_{i,i-1} + A_{i,i+1})$$

その他の $A_{i,j} = 0$

次に，$H_n(u) = P(\tilde{W} > u \mid \tilde{Q}_2 = n)$，$\mathbb{H}(u) = (H_1(u), \cdots, H_N(u))'$ とおく。

$\tilde{T}$ と $\tilde{Q}_2$ は独立だから，

$$\mathbb{H}(u) = \mu_2 \cdot \int_0^\infty e^{-\mu_2 \cdot t} \cdot \mathbb{G}(t, u) \cdot dt \tag{17}$$

この式を u で微分し，(16)式を用いると，

$$\frac{d}{du}\mathbb{H}(u) = M \cdot \mathbb{H}(u) \qquad (\text{ただし，} M = B^{-1}\cdot(A - \mu_2 \cdot E)) \tag{18}$$

初期条件として，$\mathbb{H}(0) = \mathbb{1}$ がいえるから，この微分方程式の一意解が求まり，次式を得る．

$$\mathbb{H}(u) = \exp(M \cdot u) \cdot \mathbb{1} \tag{19}$$

2)．(19)式を計算容易な式に変形するため，Mをスペクトル分解する。

ここで，$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_N, & & & 0 \\ & \pi_{N-1}, & & \\ & & \ddots, & \\ 0 & & & \pi_1 \end{bmatrix}$ ただし

$$\pi_i = P_d(Q(\tau_n - 0) = (i, N-i))$$

$\Gamma = \Pi^{1/2}\ B^{1/2}$，$\hat{M} = \Gamma \cdot M \cdot \Gamma^{-1}$ とおくと．

$$(\hat{M})_{i,i} = -(\mu(i) + \mu_2)$$

$$(\hat{M})_{i,i-1} = \sqrt{\min(N-i+1, S_2)\cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot (i-1)/i} \tag{20}$$

$$(\hat{M})_{i,i+1} = \sqrt{\min(N-i, S_2)\cdot \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot i/(i+1)}$$

その他の $(\hat{M})_{i,j} = 0$ となる。

よって，$\hat{M}$は対称行列になり，$\hat{M}$の固有値は実数。

次に，$\hat{M}$の固有値を$\{\lambda_i\}_{i=1}^{N}$とし，これらに対応する正規直交固有ベクトルを$\{\gamma_i\}_{i=1}^{N}$とすると，$\hat{M}$はスペクトル分解可能であり，$\hat{M}=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\cdot\gamma_i\cdot\gamma_i'$，$E=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\cdot\gamma_i'$　となる。

$$\therefore\quad M=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\cdot\Gamma^{-1}\cdot\gamma_i\cdot\gamma_i'\cdot\Gamma,\qquad E=\sum_{i=1}^{N}\Gamma^{-1}\cdot\gamma_i\cdot\gamma_i'\cdot\Gamma$$

これを(19)式に代入すると，

$$\mathbb{H}(u)=\sum_{j=1}^{N}\left(\Gamma^{-1}\cdot\gamma_j\cdot\gamma_j'\cdot\Gamma\right)\cdot\mathbb{1}\cdot e^{\lambda_j\cdot u} \tag{21}$$

ゆえに，次の補助定理が導ける。

補助定理4.

$$\Gamma^{-1}\cdot\gamma_j\cdot\gamma_j'\cdot\Gamma\cdot\mathbb{1}=\begin{bmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{N,j}\end{bmatrix}\text{ とおくと，}\quad\mathbb{H}(u)=\begin{bmatrix}\sum_{j=1}^{N}a_{1,j}\cdot e^{\lambda_j\cdot u}\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{N}a_{N,j}\cdot e^{\lambda_j\cdot u}\end{bmatrix} \tag{22}$$

§6. w_n^1とw_n^2の同時滞在時間分布のL.S.T

この節では，主定理となるw_n^1とw_n^2の同時滞在時間分布のL.S.Tを求める。

既に述べた様に，w_n^1とw_n^2は$Q(\tau_n-0)=(g_1+1,\ g_2)$という条件が与えられれば，互いに独立であるから，補助定理3,4より

$$\begin{aligned}&P_d\left(w_n^1\le x,\ w_n^2\le y\mid Q(\tau_n-0)=(g_1+1,\ g_2)\right)\\&=P_a\left(w_n^1\le x\mid Q(t_n+0)=(g_1+1,\ g_2)\right)\cdot P_d\left(w_n^2\le y\mid Q(\tau_n-0)=(g_1+1,\ g_2)\right)\\&=\left[1-e^{-\mu_1\cdot x}\right]*\left[1-e^{-s_1\mu_1\cdot x}\right]^{*n'}\cdot\left[1-H_{N-n+1}(y)\right]\end{aligned} \tag{23}$$

ただし，$n'=\max(g_1+1-s_1,\ 0)$

この式から，次式が導かれる.

定理

$$E(\exp(-w_n^1\cdot\theta_1 - w_n^2\cdot\theta_2))$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot\frac{\mu_1}{\theta_1+\mu_1}\cdot\left(\frac{s_1\cdot\mu_1}{\theta_1+s_1\cdot\mu_1}\right)^{n'}\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{a_{N-n+1,i}\cdot\lambda_i}{\lambda_i-\theta_2}\right) \qquad (24)$$

ただし，$n' = \max(n-s_1,\ 0)$ とおく

系

$$E(w_n^1) = \sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot(1+n'/s_1)/\mu_1$$

$$E(w_n^2) = -\sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}a_{N-n+1,i}/\lambda_i\right)$$

$$E(w_n^1\cdot w_n^2) = -\sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot(1+n'/s_1)\cdot\left(\sum_{i=1}^{N}a_{N-n+1,i}/\lambda_i\right)/\mu_1 \qquad (25)$$

$$E((w_n^1)^2) = \sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot((1+n'/s_1)^2+n'/s_1^2+1)/\mu_1^2$$

$$E((w_n^2)^2) = 2\cdot\sum_{n=1}^{N}\pi_n\cdot\left(\sum_{n=1}^{N}a_{N-n+1,i}/\lambda_i^2\right)$$

§7 滞在時間分布とその特性値の数値例

サービス規律がFCFSとTSの2つのノードをもつ2段巡回待ち行列網モデルをモデル(I)，サービス規律がFCFSの2つのノードをもつモデルをモデル(II)とし，最後に数値例を示した。この際，左側にモデル(I)を，右側にモデル(II)を並べ，対応するサーバー数，トラフィック密度，サービス率等を一致させたものを密度関数，分布関数，平均，分散，相関係数，変動係数について対比させたものである。

ノードのサービス規律がTSの場合，客の到着以後，状態が変化するごとに，ノード内の各客のサービスを受ける割合が変動するため，分散は一般に単一サーバーFCFSに比し大きくなっている．これは，密度関数，分散のグラフに現われている。

また，相関係数については，サーバー数が増加するに従い負の相関は弱まり，モデル(II)よりモデル(I)の方が負の相関は弱まる。

§8．おわりに

以上，FCFSとTSの２つのノードをもつ２段巡回待ち行列網の滞在時間分布を求めたが，今後の課題としては，他のサービス規律（割込形後着順サービス，無作為サービス等）をもつモデルについての滞在時間分布の考察がある。

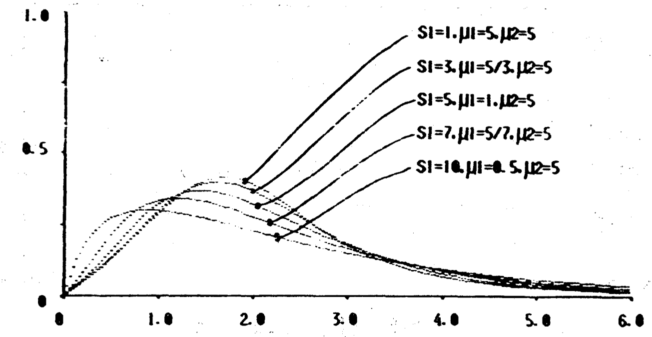
参考文献

[1] 鳥越，川島　Cyclic Queues における Cycle time の分布計算
数理解析研究所講究録 490, 待ち行列理論とその応用 '83

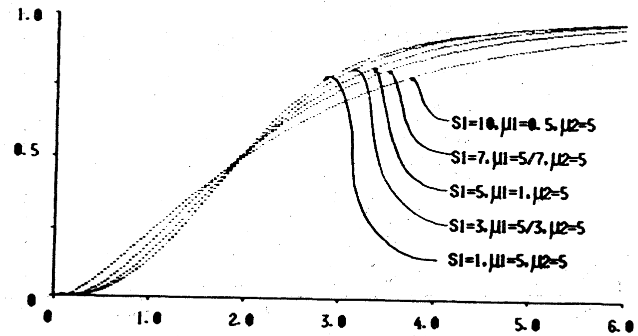
[2] D. MITRA　Performance '81　North Holland　PP. 113 ~ 131

[3] P. J. BURKE　Ann. Math. Statist　vol 39.　PP. 1144 ~ 1152 (1968)

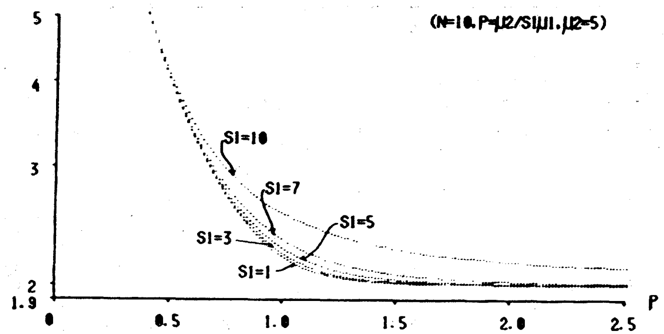
モデル(I)　密度関数



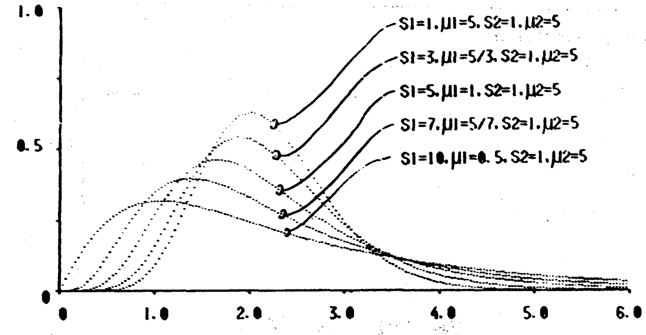
分布関数



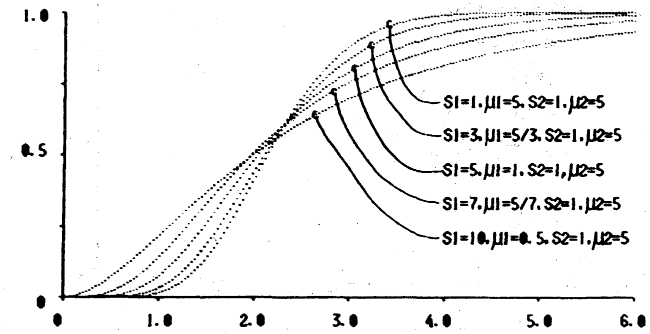
平　均



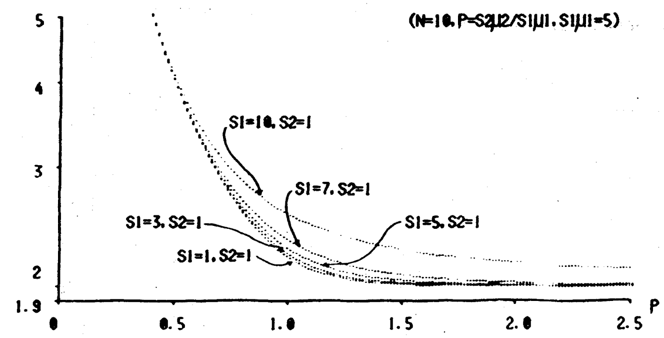
モデル(II)　密度関数



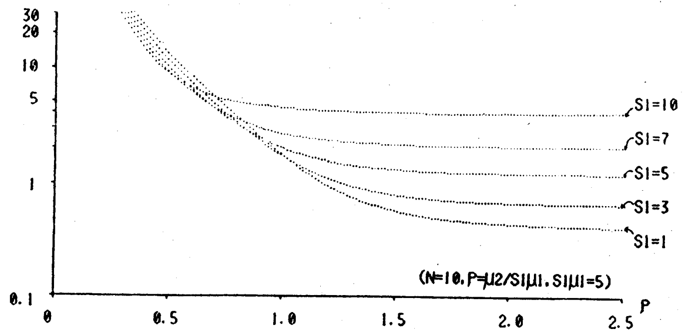
分布関数



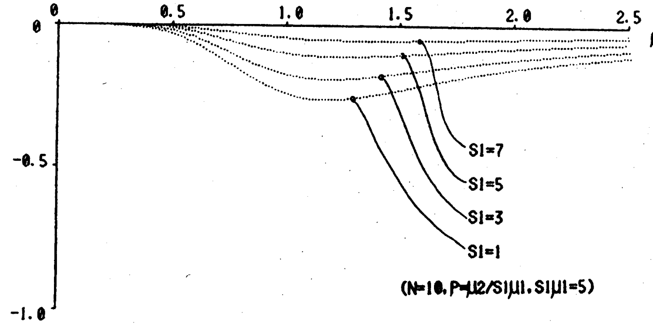
平　均



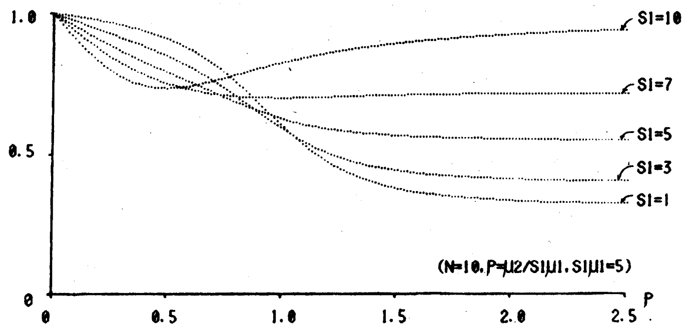
モデル(I) 分散



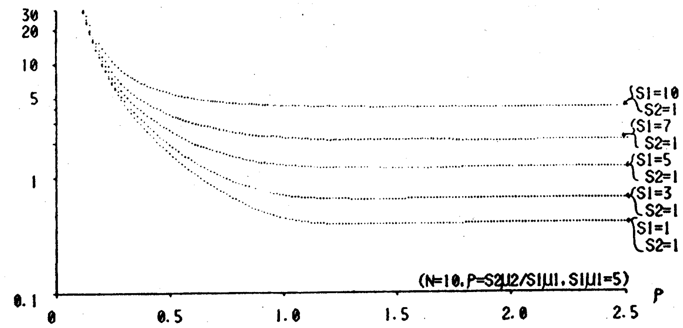
相関係数



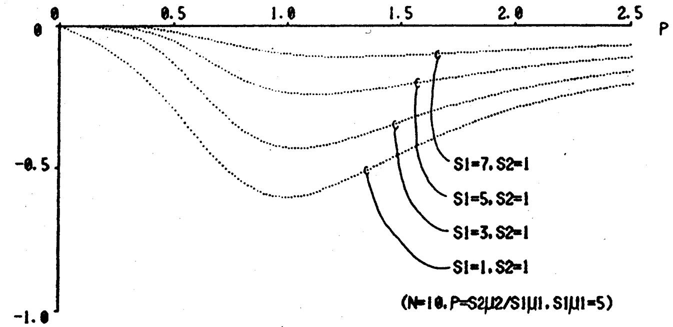
変動係数



モデル(II) 分散



相関係数



変動係数